DURÉE : 4 heures

Dans cet énoncé, on utilise les notations suivantes :

card Γ : cardinal de l'ensemble Γ.

dim E : dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.

$\bar{z}$: conjugué du nombre complexe z.

L(E, F) : espace des applications linéaires de E dans F.

tr α : trace de l'endomorphisme α.

On rappelle que la trace d'une matrice carrée d'ordre n $A = (a_{ij})$ est la quantité $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, que deux matrices semblables ont la même trace et que si α est un endomorphisme de E espace vectoriel de dimension finie, tr α est la trace d'une matrice représentant α.

On considère un espace vectoriel E de dimension finie n sur $\mathbb{C}$ et un sous-groupe fini Γ du groupe G L (E) des automorphismes linéaires de E. On donne sur E, une forme hermitienne définie positive f, et l'on note $\tilde{f}$ l'application de E^2 dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad \tilde{f}(x, y) = \sum_{\alpha \in \Gamma} f(\alpha(x), \alpha(y)).$$

Un sous-espace vectoriel F de E est dit Γ-stable si l'on a :

$$\forall \alpha \in \Gamma \qquad \alpha(F) = F.$$

Un sous-espace vectoriel F de E, Γ-stable est dit irréductible s'il est non réduit à $\{0\}$ et si les seuls sous-espaces Γ-stables contenus dans F sont F et $\{0\}$.

Si F est un sous-espace Γ-stable et si α appartient à Γ, on note α_F l'endomorphisme de F que α induit par restriction. Si F est un sous-espace Γ-stable on note φ_F l'application :

$$\begin{pmatrix} \Gamma \longrightarrow \mathbb{C} \\ \alpha \longmapsto \operatorname{tr} \alpha_F \end{pmatrix}$$

Si φ et ψ sont deux applications de Γ dans $\mathbb{C}$ on note $\langle \varphi, \psi \rangle$ le nombre complexe

$$\frac{1}{\operatorname{card} \Gamma} \sum_{\alpha \in \Gamma} \varphi(\alpha)\, \overline{\psi(\alpha)}.$$

I

1° Montrer que $\tilde{f}$ est une forme hermitienne définie positive et que Γ est un sous-groupe du groupe unitaire de $\tilde{f}$: $U(E, \tilde{f})$. Plus généralement, si F est un sous-espace Γ-stable et si α appartient à Γ, montrer que α_F appartient à $U(F, \tilde{f}_F)$, groupe unitaire de $\tilde{f}_F$, où $\tilde{f}_F$ désigne la forme induite par $\tilde{f}$ sur F.

2° Soit F un sous-espace Γ-stable. A l'aide de $\tilde{f}$, montrer que F admet un supplémentaire Γ-stable.

3° Soit F un sous-espace Γ-stable non réduit à $\{0\}$.

a. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de F, Γ-stable irréductible.

b. En déduire qu'il existe une famille $(F_i)_{i \in \{1 \ldots k\}}$ de sous-espaces Γ-stables irréductibles de F telle que $F = \bigoplus_{i=1}^{k} F_i$.

c. Montrer que $\varphi_F = \sum_{i=1}^{k} \varphi_{F_i}$.

II

Si F et G sont deux sous-espaces Γ-stables irréductibles et si γ appartient à L(F, G) on note γ' l'application de F dans G égale à

$$\sum_{\alpha \in \Gamma} \alpha_G^{-1} \circ \gamma \circ \alpha_F.$$

A

1° Soit F et G deux sous-espaces Γ-stables irréductibles.

a. Soit β dans L(F, G) vérifiant : $(\forall \alpha \in \Gamma)\ (\beta \circ \alpha_F = \alpha_G \circ \beta)$. Montrer que β est soit nul soit un isomorphisme.

b. Soit γ dans L(F, G). Montrer que γ' est soit nul soit un isomorphisme.

.../...

×24×
E.N.S. ST CLOUD § FONTENAY (Option Sc Physiques) 1977
MATHEMATIQUES II

2° Soit F un sous-espace Γ - stable irréductible.

a. Soit β dans $L(F, F)$ vérifiant : $(\forall\, \alpha \in \Gamma)\,(\beta \circ \alpha_F = \alpha_F \circ \beta)$. Montrer que β est une homothétie.

b. Soit γ dans $L(F, F)$. Montrer que γ' est une homothétie de rapport

$$\frac{\text{card } \Gamma \times \text{tr } \gamma}{\dim F}.$$

B

Soit F et G deux sous-espaces Γ - stables irréductibles.

On suppose F de dimension p et G de dimension q. $(f_1, \ldots, f_p)$ [resp. $(g, \ldots, g_q)$] désigne une base orthonormée de F relativement à $\tilde{f}_F$ [resp. de G relativement à $\tilde{f}_G$].

Si α est dans Γ, le terme d'indice i, j (i-ème ligne, j-ème colonne) de la matrice de α_F [resp. α_G] dans la base $(f_1, \ldots, f_p)$ [resp. $(g_1, \ldots, g_q]$ est noté

$$a_{ij}^{\alpha F} \left[\text{resp. } a_{ij}^{\alpha G}\right].$$

1° Montrer que, pour α dans Γ et (i, j) dans $\{1, \ldots, q\}^2$

$$a_{ij}^{\alpha^{-1} G} = \overline{a_{ji}^{\alpha G}}.$$

2° On suppose que pour tout γ dans $L(F, G)$, γ' est l'application nulle. Soit k dans $\{1, \ldots, q\}$ et l dans $\{1, \ldots, p\}$. Montrer la relation

$$\sum_{\alpha \in \Gamma} \overline{a_{kk}^{\alpha G}}\ a_{ll}^{\alpha F} = 0.$$

En déduire $< \varphi_F, \varphi_G > = 0$.

3° On suppose qu'il existe γ dans $L(F, G)$ tel que γ' soit non nul.

a. Montrer que $\varphi_F = \varphi_G$.

b. Soit k et l deux éléments distincts de $\{1, \ldots, p\}$. Montrer la relation :

$$\sum_{\alpha \in \Gamma} \overline{a_{kk}^{\alpha F}}\ a_{ll}^{\alpha F} = 0.$$

Soit k dans $\{1, \ldots, p\}$. Montrer la relation :

$$\sum_{\alpha \in \Gamma} \overline{a_{kk}^{\alpha F}}\ a_{kk}^{\alpha F} = \frac{\text{card } \Gamma}{p}.$$

(Pour ces relations, on explicitera la relation A. 2° *b.* pour γ convenablement choisi.)

c. En déduire que $< \varphi_F, \varphi_G > = 1$.

III

1° En utilisant (I. 3°) et (II. B), montrer qu'un sous-espace F, Γ - stable, est irréductible si et seulement si $< \varphi_F, \varphi_F > = 1$.

2° On suppose que E est de dimension 4 et que Γ est l'ensemble des automorphismes de E qui laissent globalement invariant l'ensemble $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ où $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est une base de E.

a. Calculer $< \varphi_E, \varphi_E >$.

b. Montrer que E est somme directe de deux sous-espaces Γ-stables irréductibles que l'on déterminera.

FIN

x25x

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail